

فصل اول

کلیات

مقاومت مصالح:

آن موضوعی از علم مکانیک که با استفاده از روشهای تحلیل به بررسی و تعیین مقاومت ، صلبیت و پایداری ارتجاعی اعضای باربری پردازد به میکانیک جامدات (و یا مکانیک مصالح و یا مقاومت مصالح) مشهور است.

روش مقطع:

صفحه ای فرض و دلفواه از جسم عبور داده می شود به طوری که جسم به طور کامل به دو قسمت مجزا، تقسیم شود این عمل روش مقطع نامیده می شود. از آنجایی که اگر جسم کلاً در تعادل باشد هر جزء آن نیز باید در حال تعادل باشد نتیجتاً اصل زیر منتهی می شود:

نیروهای خارجی مؤثر در یک طرف هر مقطع دلفواه ، با نیروهای به وجود آمده در سطح قطع شده (که نیروهای مقاوم داخلی خوانده می شوند) ، در حال تعادل هستند.

یا به طور خلاصه:

نیروهای مقاوم داخل ، نیروهای خارجی را متعادل می کنند.

سیستمهای یکاها:

سیستم بین المللی یکاها (یکاهای SI)

در طی سالهای اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آماد یا به زبان فرانسه (system International d' units) که مختلف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب کردند. در این سیستم یکاهای اصل، یکاهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب (m) و کیلوگرم (kg) و ثانیه (s) می نامند.

یکاهای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با $1 \frac{m}{s^2}$ بدهند.

$$1N = (1kg)(1 \frac{m}{s^2}) = 1kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

پیشوند واحدها:

| نماد | پیشوند | مقدار |
|-------|--------|---------------------|
| G | گیگا | $1000/000/000=10^9$ |
| M | مگا | 10^6 |
| K | کیلو | 10^3 |
| M | میلی | $0/001=10^{-3}$ |
| μ | میکرو | 10^{-6} |
| n | نانو | 10^{-9} |

$$1kg = 1000m$$

$$1mm = 0.001 m$$

$$1Mg = 1000 kg$$

$$1g = 0.001kg$$

$$1kg = 1000N$$

$$3.82km = 3820m$$

$$47.2mm = 0.0472m$$

$$3.82KN = 3.82 \times 10^3 N$$

$$47.2mm = 47.2 \times 10^{-3} mm$$

تعاریف پایه

ماده:

ماده عبارت از وجودی است که فضاگیر باشد.

جسم:

ماده ای را گویند که توسط یک سطح بسته محدود شده باشد.

جسم صلب:

جسمی که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجود نباشد.

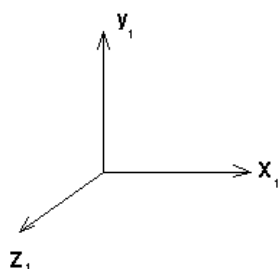
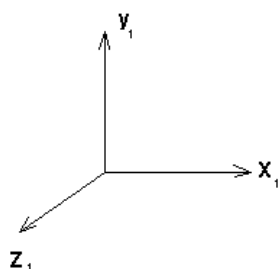
جسم تغییر شکل پذیر:

جسمی که دارای خواص تغییر شکل پذیری باشد.

جسم همگن:

جسمی است که دارای خاصیت یکسان در تمام نقاط باشد. تمام اجسام مورد مطالعه در این درس

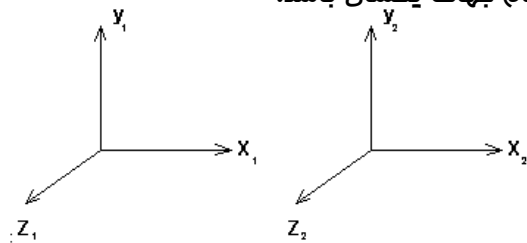
همگن فرض می شوند.



$$x_1 = y_1 - z_1$$

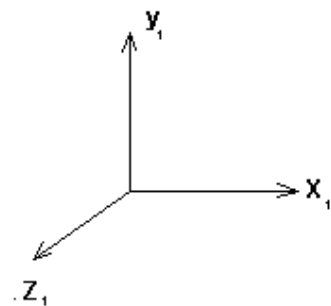
جسم ایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، خواص آن در تمام جهات یکسان باشد.



جسم غیرایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، دارای خواص مختلف در جهات مختلف باشد.



$$x_1 \neq y_1 \neq z_1$$

جسم ارتوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، دارای خواص مختلف در سه جهت عمود بر هم باشد.

فصل سوم

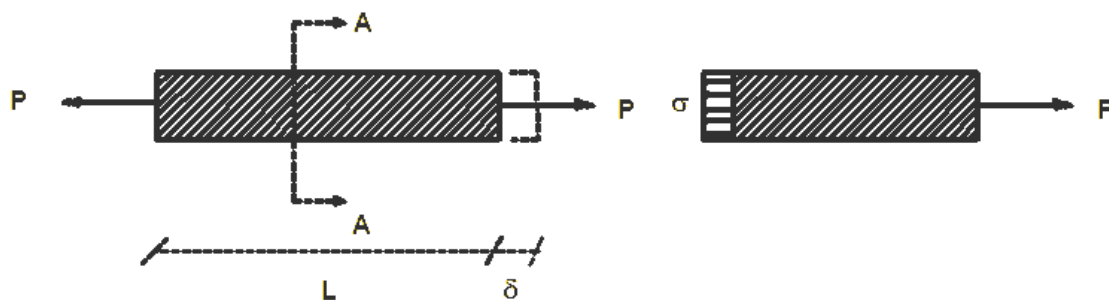
تنش و بارهای مموری

مقدمه:

مقاومت مصالح شافه ای از مکانیک کاربردی است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری های مختلف بررسی می کند. معمولاً هدف از تحلیل تعیین تنش ، کرنش و تغییر شکل ایجاد شده بوسیله بارها در قطعات سافتمان و به طور کلی اجزاء یک سازه می باشد.

تنش و کرنش:

مفاهیم تنش و کرنش را می توان به طور ساده با مطالعه یک میله منشوری تحت کشش بیان نمود.



شدت نیرو، یعنی نیرو در واحد سطح به نام تنش نامیده می شود و معمولاً با حرف یونانی σ نشان داده می شود.

تنش:

معادله تنش یکنواخت در یک میله منشوری

$$\sigma = \frac{p \rightarrow N}{A \rightarrow mm^2}$$

$$1- \text{سیستم انگلیسی} \quad lb \rightarrow \frac{lb}{in^2} = psi \quad \text{نیرو}$$

$$A = in^2$$

2- سیستم بین المللی (SI)

$$A = m^2$$

$$\Rightarrow \quad Mpa = \frac{N}{mm^2} \quad \text{چون پاسکال کوچک است} \quad N \rightarrow \frac{N}{m^2} = pa \quad \text{نیرو}$$

$$3- \text{سیستم} \quad kg \rightarrow \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow msk \quad \text{نیرو}$$

$$A = Cm^2$$

❖ موقعی که میله فوق کشیده می شود تنش ایجاد شده به نام تنش کششی نامیده می

شود لذا در مقاومت مصالح تنش کششی را مثبت و تنش فشاری را منفی فرض می کنند.

❖ شرط لازم برای درستی معادله تنش این است که تنش روی سطح مقطع به طور یکنواخت

توزیع شده باشد که این شرط موقعی برقرار خواهد شد که نیروی محوری p در مرکز سطح

مقطع میله وارد شود.

❖ لذا در سراسر این جزوه فرض می شود که نیروهای محوری در مرکز سطح مقطع اثر کنند مگر

در مواردی که عکس این مطلب ذکر شده باشد.

به طور کلی تعریف تنش در روی سطحی عمود به محور $x - y$ از سیستم مختصات کارتزین سه

بعدی را بفرم زیر می توان نشان داد.

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta p_x}{\Delta A_x} \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta p_y}{\Delta A_y} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta p_z}{\Delta A_z}$$

$$\Delta A_x \rightarrow 0$$

$$\Delta A_y \rightarrow 0$$

$$\Delta A_z \rightarrow 0$$

با توجه به فرمول تنش به آسانی می توان مد ماکزیمم نیروی F را پیدا نمود بنموی که تنش از

مد قابل قبول تجاوز نکند:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{all} \quad \Rightarrow F = A \cdot \sigma_{all}$$

$$F = \sigma_x \cdot A$$

مقدار تنش مجاز بستگی به نوع مصالح و عضو دارد، و با استفاده از نتایج آزمایشات روی

نمونه های ساده و استاندارد و منظور داشتن مسائل تجربی و تئوریک به دست می آید.

تنش مجاز $1440 \frac{kg}{cm^2}$ برای فولاد معمولی و اعضای تحت کشش ساده اغلب منظور می شود.

صورت های حل مسائل:

1- بررسی تنش (Analysis آنالیز)

2- با تنش مجاز سطح مقطع را محاسبه کنیم تا تنش از تنش مجاز تجاوز نکند

(طراحی، Design)

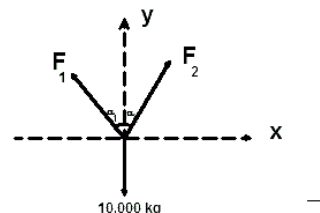
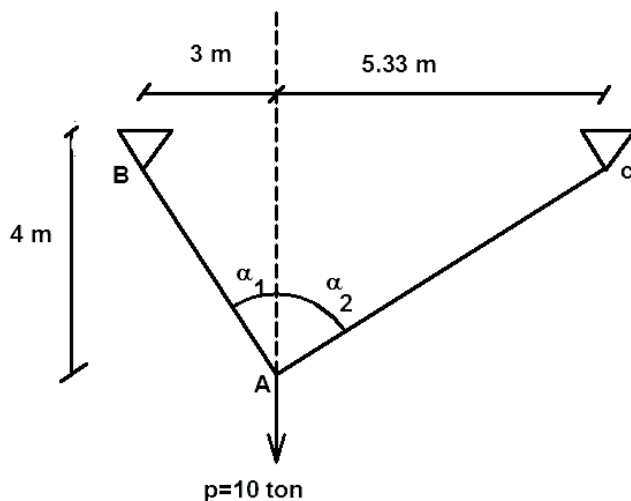
3- با تنش مجاز و سطح مقطع مشخص، حداکثر بارگذاری را محاسبه کنید (کنترل، control)

مثال:

الف- فرمای دو عضوی زیر که سطح مقطع آنها به ترتیب برابر $A_1 = 10 \text{ cm}^2$ ،

$A_2 = 5 \text{ cm}^2$ است. تحت اثر بار $p = 10 \text{ ton}$ واقع شده است. تنش نرمال متوسط در هر عضو

چقدر است؟



$$L_{AB} = 5 \text{ m} \quad L_{AC} = 6.64 \text{ m}$$

$$\sin \alpha_1 = 0.6, \cos \alpha_1 = 0.8,$$

$$\sin \alpha_2 = 0.8, \cos \alpha_2 = 0.6$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow -0.6F_1 + 0.8F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{3}{4}F_1 \quad (1)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 - 10000 = 0 \Rightarrow 0.8F_1 + 0.6F_2 = 10000 \quad (2)$$

$$(1) \text{ at } (2) \Rightarrow 0.8F_1 + 0.6\left(\frac{3}{4}F_1\right) = 1.25F_1 = 10000 \Rightarrow [F_1 = 8000 \text{ kg}]$$

$$F_2 = \frac{3}{4}F_1 = \frac{3}{4} \times 8000 \Rightarrow [F_2 = 6000 \text{ kg}]$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{8000}{10} \Rightarrow \left[\sigma_1 = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{6000}{5} \Rightarrow \left[\sigma_2 = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

ب - اگر انتخاب سطح مقطع در اختیار طراح باشد و طراح نخواهد تنش در هر عضو بزرگتر از تنش

مجاز $\sigma_{all} = 1400 \frac{kg}{cm^2}$ شود. مقادیر A_2, A_1 را باید چقدر انتخاب نماید؟

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{F_1}{\sigma_1} = \frac{8000}{1400} \Rightarrow [A_1 = 5.72 cm^2 \\ A_2 = \frac{F_2}{\sigma_2} = \frac{6000}{1400} \Rightarrow [A_2 = 4.3 cm^2 \end{cases}$$

ج - اگر تنش مجاز کششی همان $1400 \frac{kg}{cm^2}$ و سطح مقطع همان $A_1 = 10 cm^2, A_2 = 5 cm^2$ باشد،

مداکثر مقدار نیروی خارجی p چقدر می تواند باشد تا تنش در هیچ عضو از تنش مجاز تجاوز نکند.

$$(F_1)_{\max} = \sigma_{all} \cdot A_1 = 1400 \times 10 = 14000 kg$$

$$(F_2)_{\max} = \sigma_{all} \cdot A_2 = 1400 \times 5 = 7000 \frac{kg}{cm^2}$$

$$F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha_2 = (p)_{\max} \quad (3) \rightarrow P_{\max} = 14000 \times 0.8 + 7000 \times 0.6 \Rightarrow P_{\max} = 15400 kg$$

وقتی p مداکثر ممکن و مجاز را دارد که یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد. طبقاً آن حالتی که در آن P

کمتر اتفاق بیافتد، مورد نظر خواهد بود. برای روشن شدن موضوع تصور کنید، نیروی خارجی P جمع وزنه

های است که بتدریج اضافه میشود وقتی که P به مدی میرسد که یکی از سه حالت فوق اتفاق

بیفتد، افزایش بیشتر وزنه مجاز نخواهد بود. بنابراین در هر یک از سه حالت با توجه به اینکه همواره گره

A باید در تعادل استیک باشد یعنی $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$ نیروی لازم برای رسیدن به هر حالت را

مماسبه میکنیم و از میان آنها کمترین مقدار جواب مساله خواهد بود.

$$F_2 = 7, F_1 = 14 \quad (I)$$

$$(P_{\max})_1 = 14 \cos \alpha_1 + 7 \cos \alpha_2 = 15.4 \text{ ton}$$

$$F_1 = 14 \text{ از معادله (1)} \Leftrightarrow F_2 = \frac{3}{4} F_1 \quad \text{و با جایگزینی در معادله (3) خواهیم داشت:} \quad (II)$$

$$(P_{\max})_2 = F_1 \cos \alpha_1 + \frac{3}{4} F_1 \cos \alpha_2 = 17.5 \text{ ton}$$

$$F_1 = \frac{4}{3} F_2 \quad \Leftrightarrow F_2 = 7 \quad (III) \quad \text{و با جایگزینی در معادله (3) خواهیم داشت:}$$

$$(P_{\max})_3 = \frac{4}{3} F_2 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = 11.67 \text{ ton}$$

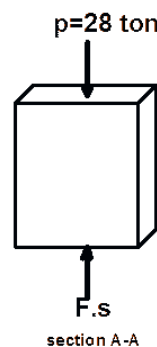
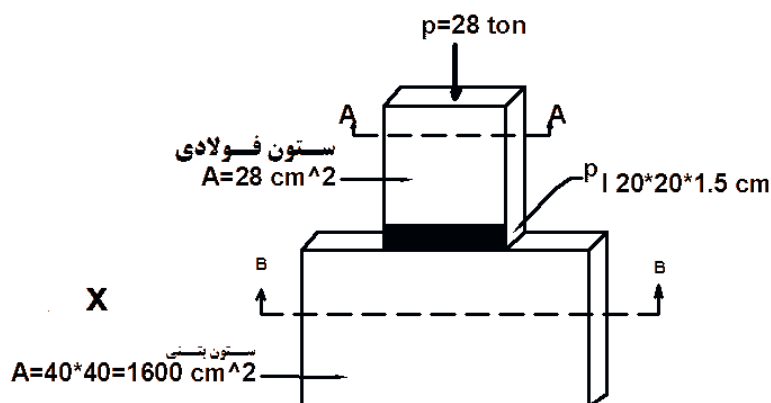
$$P_{\max} = \min((P_{\max})_1, (P_{\max})_2, (P_{\max})_3) = 11.67 \text{ ton}$$

مثال 2:

الف- ستونی فولادی به مسامت مقطع $A_s = 28 \text{ cm}^2$ روی ستون بتنی مربعی شکل به ابعاد

$40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ در یک محور قرار گرفته است. تنش متوسط در ستون فلزی و ستون بتنی در اثر

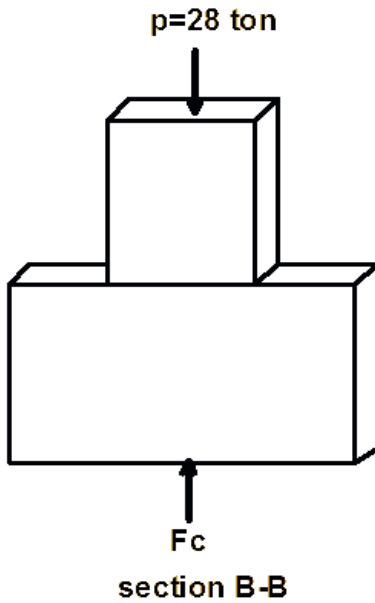
بار $p = 28 \text{ ton}$ چقدر است؟



$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow F_s - P \Rightarrow F_s = P = 28 \text{ ton}$$

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{28000}{28} \Rightarrow \sigma_s = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \leq \sigma_{all s}$$

این تنش نباید قاعدتاً از تنش مجاز فشاری ستون فولادی تجاوز کند.

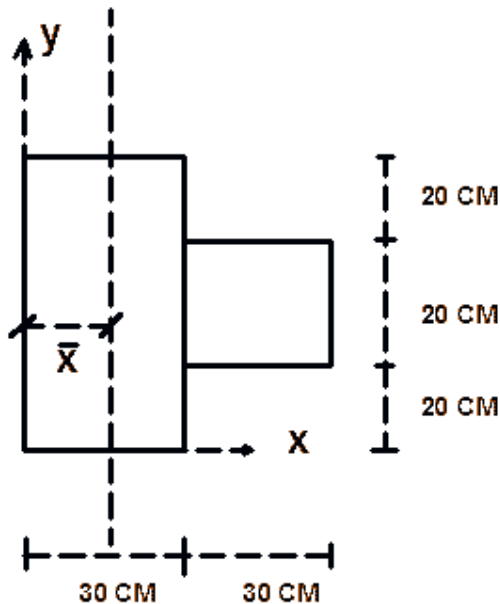


$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_c} = \frac{28 \times 10^3}{1600} \Rightarrow \sigma_c = 17.5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \leq \sigma_{all c}$$

این تنش نباید از تنش مجاز فشاری ستون بتنی تجاوز کند.

مثال:

محل اثر نیرو را در مقطع ستون مقابل بگونه ای بدست آورید که تنش یکنواخت داشته باشیم؟



$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{30 \times 60 \times 15 + 30 \times 20 \times 45}{30 \times 60 + 30 \times 20} = 22.5 \text{ cm}$$

تنش لهیدگی

تنش لهیدگی از نوع تنشهای قائم است که در محل تماس بین دو سطح حاصل می شود. در این حالت تنش لهیدگی را با تنش مجاز لهیدگی جسم ضعیف تر مقایسه می کنیم.

$$\sigma_{bea} = \frac{P}{A} \leq \text{تنش مجاز لهیدگی ماده ضعیفتر}$$

مثال:

ستون مرکب مقابل با سطح مقطع و تنشهای مجاز مشخص شده است. حداکثر بار P که به این ستون

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_{all} \cdot A$$

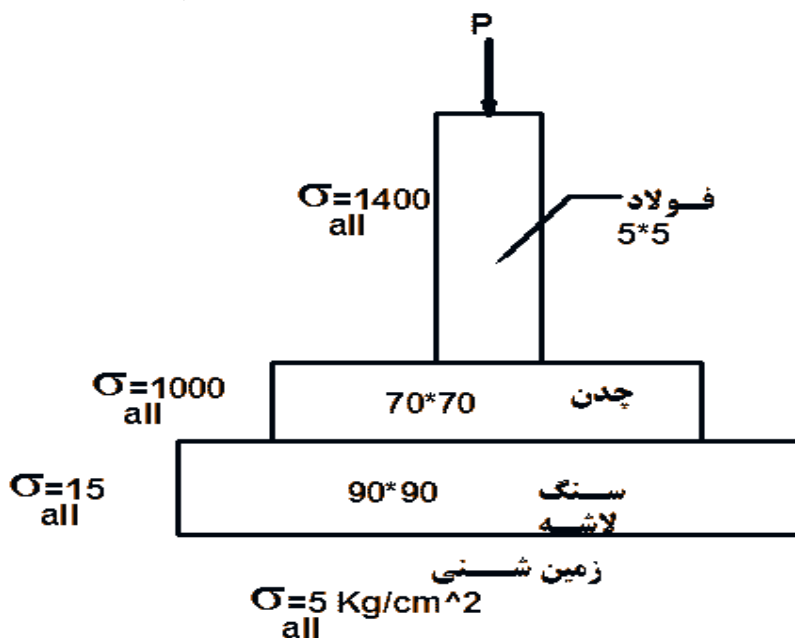
می توان اعمال کرد چقدر است؟

$$\text{ظرفیت لهیدگی بین فولاد و چدن} = 5 \times 5 \times 1000 = 25000 \text{ kg}$$

$$\text{ظرفیت لهیدگی بین چدن و لاشه سنگ} = 70 \times 70 \times 15 = 73500 \text{ kg}$$

$$\text{ظرفیت لهیدگی بین لاشه سنگ و زمین شنی} = 90 \times 90 \times 5 = 40500 \text{ kg}$$

$$p = \min(25000, 73500, 40500) = 25000$$



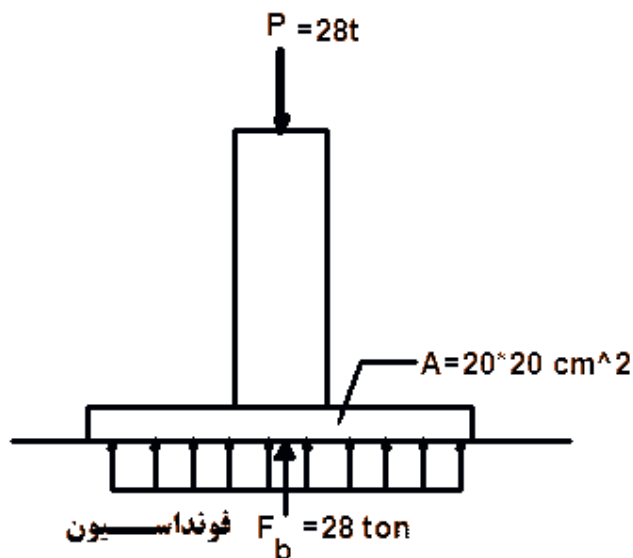
در مثال قبل (مثال 2)

ب- اگر ستون فلزی توسط ورق فولادی نسبتاً ضعیف بضمامت 1.5cm و ابعاد $20 \times 20 \text{ cm}$ روی ستون

بتنی نشست باشد، مقدار تنش در محل تماس ورق فولادی و کف ستون و سطح بتن چقدر است؟

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{28 \times 10^3}{20 \times 20} \Rightarrow \sigma_b = 70 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

تنش لهیدگی



قاعاً این تنش نباید از تنش مجاز لهیده شدن

عضو با مصالح ضعیفتر تجاوز کند.

ج- اگر فرض کنیم تنش مجاز ستون فولادی $1200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ، تنش مجاز ستون بتن آرمه $100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ و تنش

مجاز لهیدگی در بتن آرمه $120 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ باشد، حداکثر نیروی فشاری P می تواند باشد تا هیچکدام از تنش

مجاز تجاوز نکند.

$$P_1 = \sigma_s \cdot A_s = 1200 \times 28 = 33600 \text{ kg} \rightarrow P_1 = 33.6 \text{ ton}$$

$$P_2 = \sigma_b \cdot A_b = 120 \times 20 \times 20 = 48000 \text{ kg} \rightarrow P_2 = 48 \text{ ton}$$

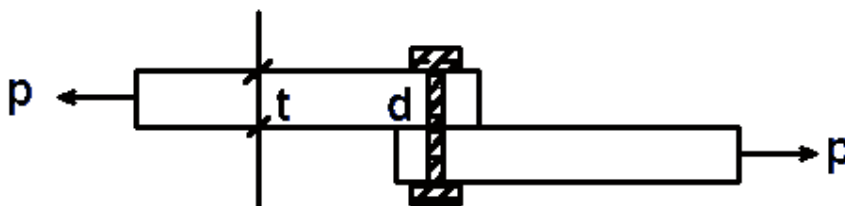
$$P_3 = \sigma_c \cdot A_c = 100 \times 40 \times 40 = 160000 \text{ kg} \rightarrow P_3 = 160 \text{ ton}$$

$$P_{\max} = \min(P_1, P_2, P_3) \Rightarrow P_{\max} = 33.6 \text{ ton}$$

تنش برشی

در اتصالات پیچی علاوه بر کنترل تنش برشی در مقطع پیچ، باید تنش لهیدگی بین بدنه و صفحه اتصال

نیز کنترل گردد. به طور متوسط این تنش از رابطه زیر دست می آید.



$$\sigma_{bea} = \frac{P}{dt} \Rightarrow \tau = \frac{P}{nA} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

اتصال پیچی یک برشه $n=1$

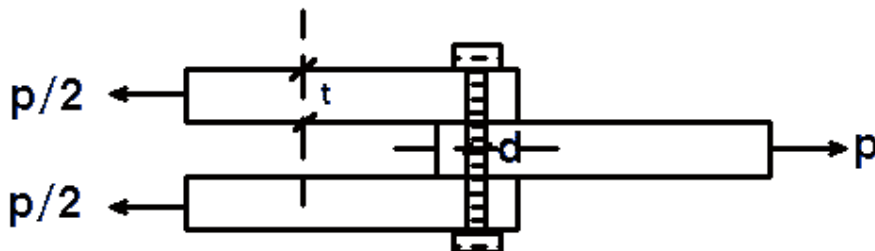
$$\tau = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{bea} = \frac{P}{dt}$$

اتصال پیچی دو برشه $n=2$

$$\tau = \frac{P}{2A}$$

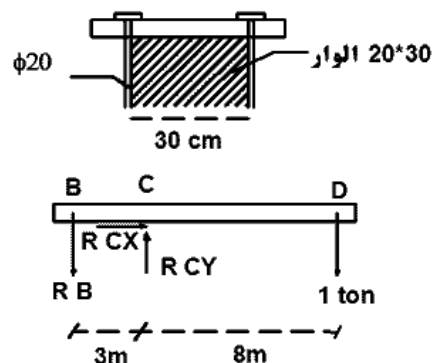
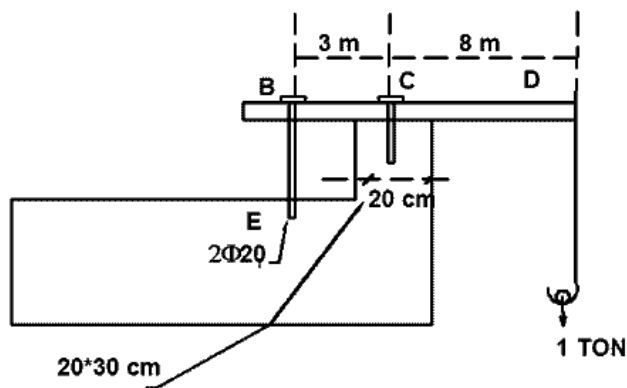
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$



مثال-

الف- تنش نرمال در بدنه پیچها را محاسب کنید.

ب- تنش لهدگی (تماس) در تکیه گاه وسط و سطح اتکا (20×30) چقدر است ؟



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow R_{cx} = 0$$

$$\downarrow \sum M_c = 0 \rightarrow R_B \times 3 - 1 \times 8 = 0 \rightarrow R_B = \frac{8}{3} = 2.67 \text{ ton} \downarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow R_{cy} - 2.67 - 1 = 0 \rightarrow R_{cy} = 3.67 \uparrow$$

عکس العمل R_B به صورت کشش در دو پیچ به تکیه گاه اصلی منتقل می شود. پیچها با قطر 20mm

دارای سطح مقطع مساوی هستند.

$$\sigma_{bolt} = \frac{F_{bolt}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{R B l_2}{\frac{\pi \times 2^2}{4}} = \frac{4 \times 2.67 \times 1000}{2\pi \times 4} \Rightarrow \sigma_{bolt} = 425 \frac{kg}{cm^2}$$

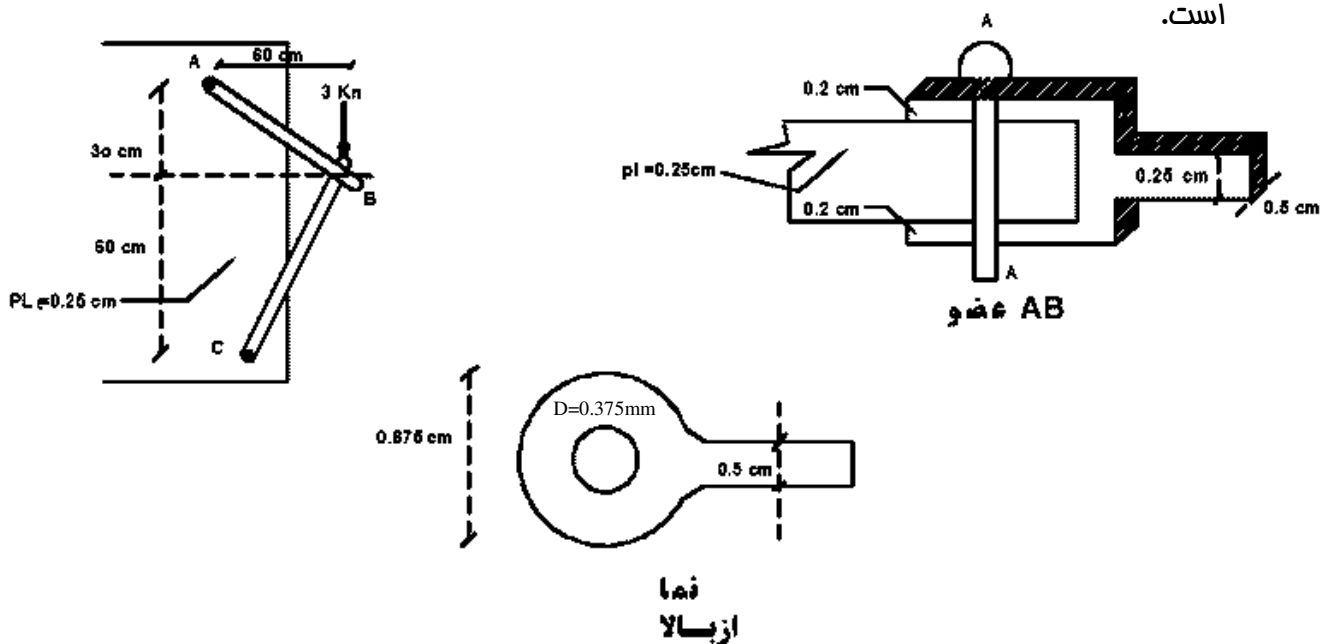
$$\sigma_{bearing} = \frac{R c_y}{20 \times 30} = \frac{3.67 \times 1000}{20 \times 30} \Rightarrow \sigma_{bea} = 6.12 \frac{kg}{cm^2}$$

مثال:

تنش نرمال عضو AB و BC را در موالی وسط عضو حساب کنید.

مقطع عضو AB در حدود وسط آن $0.25 \times 0.5 \text{ cm}$ و مقطع BC در حدود وسط آن $0.25 \times 0.875 \text{ cm}$

است.



$$-\downarrow \sum M_c = 0 \rightarrow F_{Ax} (30 + 60) - 3 \times 60 = 0 \rightarrow F_{Ax} = 2 \text{ kn}$$

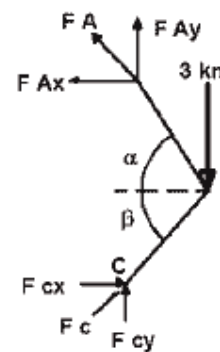
$$F_{Ay} = \frac{F_{Ax}}{2} \Rightarrow F_{Ay} = 1 \text{ kn} \quad (\tan \alpha = \frac{1}{2})$$

$$F_A = 2 \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \right) \Rightarrow F_A = 2.23 \text{ kn}$$

$$-\downarrow \sum M_A = 0 \rightarrow 3 \times 60 - F_{cx} \times 90 = 0 \rightarrow F_{Cx} = 2 \text{ kn}$$

$$F_{cy} = F_{cx} \tan 45 \Rightarrow F_{cy} = 2 \text{ kn}$$

$$F_c = \sqrt{2}(2) \Rightarrow F_c = 2.83 \text{ kn}$$



تنش در عضو AB در وسط:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_A}{A_{AB}} = \frac{2.23}{(0.25)(0.5)} = 17.8 \frac{\text{kn}}{\text{cm}^2}$$

کششی:

تنش در سر A از عضو AB در محل سوراخ پیچ (تنش در مقطع بمرانی):

$$\sigma'_{AB} = \frac{2.23}{2 \times 0.2 \times (0.875 - 0.375)} = 11.2 \frac{\text{kn}}{\text{cm}^2}$$

تنش در تنه عضو BC:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_B}{A_{BC}} = \frac{2.83}{0.875 \times 0.25} = 12.9 \frac{kn}{cm^2}$$

چون نقطه BC فشاری است در مقطعی که از سوراخ بگذرد، تنش وجود ندارد (تنش در محل سوراخ پیچ از عضو BC)

تنش لهیدگی بین میله و بدنه سوراخ در نقطه C از عضو BC:

$$\sigma_b = \frac{F_c}{A_{ber}} = \frac{2.83}{(0.375 \times 0.2) \times 2} = 18.8 \frac{kn}{cm^2}$$

تنش لهیدگی بین میله میله و صفحه در C:

$$\sigma'_b = \frac{F_c}{A_{ber}} = \frac{2.83}{0.375 \times 0.25} = 30.1 \frac{kn}{cm^2}$$

$$\tau_c = \frac{F_c}{2A} = \frac{2.83}{2 \times \frac{\pi \times 0.375^2}{4}} = 12.9 \frac{kn}{cm^2}$$

تنش برشی در میله

فصل چهارم

کرنش - تغییر طول

مقاومت مصالح یا مکانیک جامدات عموماً با اجسامی سروکار دارد که تغییر شکل پذیرند. میله فلزی را در نظر بگیرید که از سقفی آویزان و در انتها به آن وزنه ای آویزان می شود با متناظر داشتن این میله با قطعه کش یا فلز به آسانی قابل احساس و استنباط است که :

الف- در اثر اعمال نیرو (افزایش وزنه) طول سیم یا میله اضافه می شود و این افزایش طول با مقدار نیرو متناسب است.

ب- برداشتن کل وزنه ها و حذف نیرو ، باعث برگشت میله یا سیم امالت اولیه خواهد شد.

ج- افزایش طول بستگی مستقیم به طول اولیه و بستگی معکوس با سطح مقطع (متناظر سفتی) دارد.

د- با تجسم وضعیت اجسام نرمتر مثل کش و فنر به آسانی قابل احساس است که هماهنگی رفتارهای فوق محدود به مدی از بارگذاری (افزایش وزنه) است. بطوریکه بعد از آن مد هماهنگی و تناسبات فوق مشاهده نمی شود، مثلاً کش شروع به باریک شدن می کند میل فنر تغییر شکل دائم می دهد بنموی که بعد از برداشتن نیرو به حالت اول باز نمی گردد.

به رفتارهای مشابه رفتارهای فوق رفتارهای «ارتجاعی» یا «الاستیک» می گویند و آن محدوده هماهنگی رفتار را «محدوده الاستیک» جسم معرفی می کنیم.

در مقاومت مصالح اغلب مصالح سازه ای را از جمله فولاد سافتمانی و بتن را می توان تا مدودی از بارگذاری الاستیک فطی دانست، یعنی نیرو با تغییر طول متناسب خواهد بود(مانند فنر)

تغییر طول نسبی:

تغییر طول نسبی عبارت است از نسبت میزان تغییر طول به طول اولیه این تغییر طول در واحد طول به نام کرنش خوانده می شود.

مفهوم تغییر طول نسبی در یک نقطه عبارت است از تغییر طول نسبی المان به طول Δx در امتداد محور X و تئیکه Δx به سمت صفر میل میکند یعنی

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta}{\Delta x} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

در فرمول فوق سه کمیت $\varepsilon, L_0, \Delta L$ وجود دارند که در صورت معلوم بودن یا قابل تعیین بودن دو تا از

کمیتها، کمیت سوم قابل محاسبه است. عبارت دیگر فرمول به فرمهای زیر میتواند بیان شود:

$$\Delta L = \varepsilon \times L_0 \quad L_0 = \frac{\Delta L}{\varepsilon}$$

در روابط فوق قطعاً $\Delta L, L_0$ میبایستی واحد طول یکسان داشته باشند و نتیجتاً ε بدون بعد میباشد.

رابطه هوک در اعضای بار محوری:

همانطور که از توضیحات قبل استنباط می شود، تنش محوری با تغییر طول نسبی تناسب فطری دارد. این موضوع در مورد بسیاری از مصالح سازه‌ای از جمله فولاد سافتمانی تا حدود از بارگذاری صادق است. آزمایش کشش ساده یک قطعه فولادی با اعمال نیروی کششی بتدریج افزایش یافته تناسب تنش (میزان نیرو بر واحد سطح) و تغییر طول نسبی و میزان تغییر طول در واحد طول را بشکل منحنی زیر نشان می دهد.

A = تنش مد تناسب B = تنش تسلیم

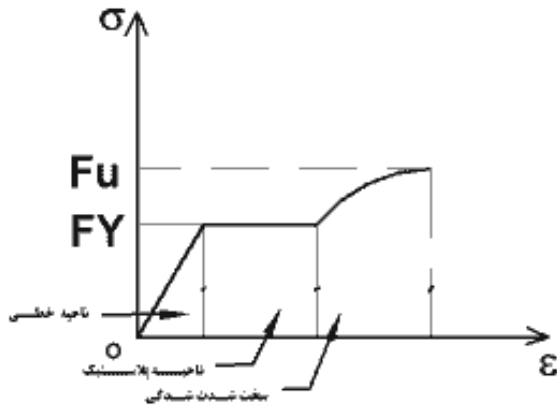
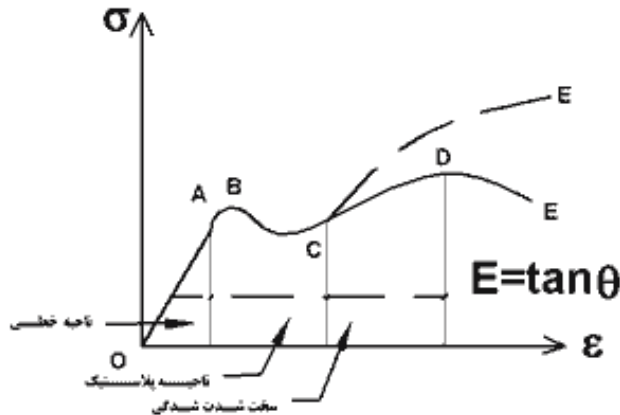
OA = نامیه فطی

BC = نامیه خمیری

C = تنش سفت شدگی کرنشی

D = تنش نهایی

E = تنش گسیفتگی



افزایش تنش از صفر تا σ_y باعث افزایش تغییر شکل نسبی از صفر تا ϵ_y میشود که رابطه آنها در ممدوده OA تقریباً فطی است. بعد از نقطه A رفتار غیر فطی خواهد بود. ضریب زاویه فط OA ضریب تناسب فطی σ, ϵ در ممدوده الاستیک OA خواهد بود. بنابراین رابطه تنش، تغییر طول نسبی به فرم زیر نوشته میشود.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \rightarrow \sigma = E \cdot \epsilon$$

ضریب E را مدول الاستیسیته معرفی میکنیم که برای مصالح مختلف سافتمانی متفاوت است، و در تعیین آنها مدلهای آزمایشی مختلف بکار میرود.

در فرمول بالا مقدار تنش با σ و تغییر طول نسبی با ϵ نشان داده میشود و ضریب E واحدی یکسان با σ دارد و ϵ بدون بعد است.

معمولا برای اطمینان، تنش مجاز را کمتر از σ_y (محدود 60 درصد) می گیرند.

اجسام مختلف تحت اثر نیرو، (فتا)های متفاوتی خواهند داشت. نمودار تنش و کرنش یک ماده نشانگر

رفتار آن ماده تحت اثر بار خواهد بود. این نمودار ممکن است بصورت الاستیک (برگشت پذیر) و یا

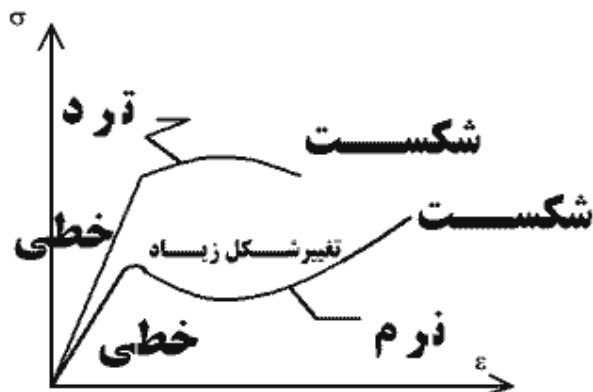
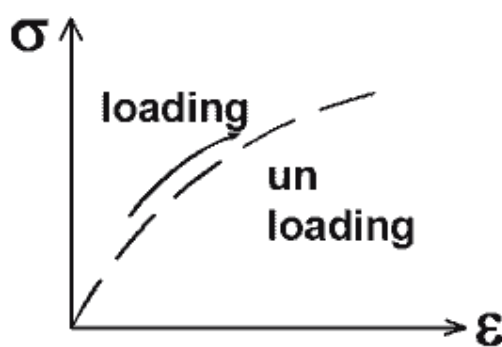
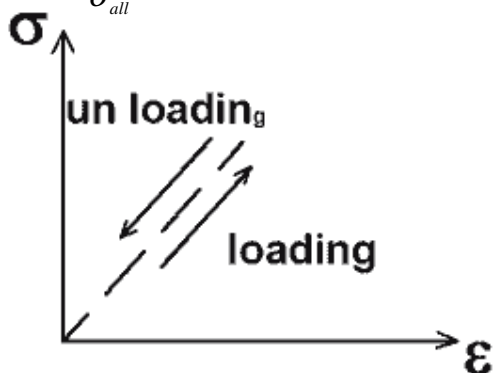
غیرالاستیک (برگشت پذیر) باشد، و در هر صورت می تواند بصورت فطی باشد. در مبمٹ مقاومت مصالح

، بیشتر، قسمت فطی نمودار تنش - کرنش مورد توجه قرار دارد، که رابطه آن با قانون هوک (

$\sigma = E \cdot \epsilon$) بیان می شود.

$$S.F = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

$$S.F = \frac{\sigma_y}{\sigma_{all}}$$



مماسبه تغییر طول محوری:

با جایگذاری مقداری از فرمول تنش $\sigma = \frac{F}{A}$ و مقدار ε از فرمول تغییر شکل نسبی $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ خواهیم داشت:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2), \quad \sigma = \frac{F}{A} \quad (3) \Rightarrow 2,3 \Rightarrow \varepsilon = \frac{F}{AE} \quad (4)$$

$$(4), (1) \Rightarrow \Delta L = \frac{F}{A \cdot E} L \Rightarrow \Delta L = \frac{FL}{AE}$$

در حالت کلی تر مقدار تغییر طول یک عضو محوری از رابطه انتگرال زیر مماسبه خواهد شد.

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon dx \quad \Delta L = \int_0^L \frac{F}{EA} dx$$

که مقادیر A, E, F ممکن است در طول عضو متغیر باشد (تابعی از x)

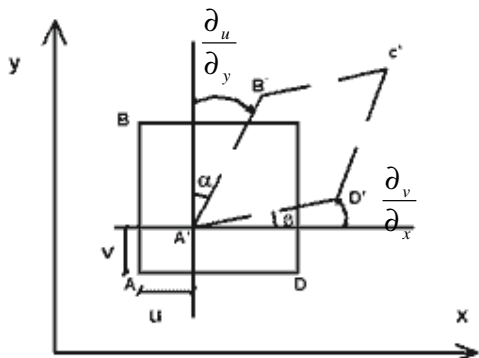
تغییر شکل نسبی برشی یا زاویه ای:

علاوه بر آنکه یک نقطه از جسم نسبت به نقطه ای دیگر از آن می تواند تغییر مکان انتقالی با مؤلفه

های U, V, W داشته باشد تغییر شکل زاویه ای نیز ممکن است اتفاق بیفتد، تغییر شکل نسبی برشی در

یک المان در صفحه xy را با علامت γ_{xy} نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

شکل روبرو یک المان دو بعدی را نشان میدهد.



اندیسهای γ ، نماینده صفحه ای هستند که تخی $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ، $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ ، $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

زاویه در آن صورت میگیرد.

$$\alpha + \beta = \text{کل تغییر زاویه} = \text{tg} \alpha + \text{tg} \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

α, β یار کوچک هستند و مساوی تانژانت خودشان میباشد.

اگر γ را کرنش برشی تعریف نماییم.

$$\tau = G\gamma$$

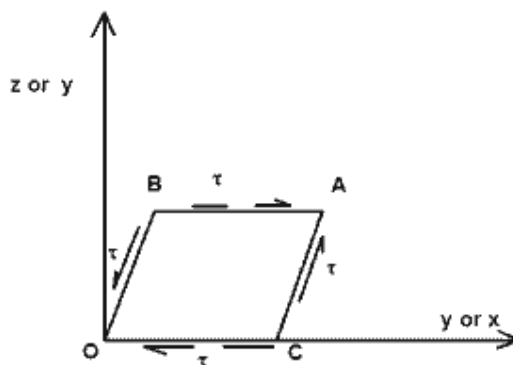
که در G ثابت تناسب است و ضریب ارتجاعی برشی و یا ضریب صلبیت نامیده می شود و چون γ

همانند ε بدون بعد است γ هم بر حسب رادیان و هم بر حسب درصد بیان می شود.

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G$$



ضریب پواسون:

موقعی که میله ای تحت کشش می باشد اضافه طول مموری آن همراه با انقباض جانبی می باشد . به

عبارت دیگر با اضافه شدن طول میله عرض آن کاهش می یابد . تا زمانی که میله به صورت ارتجاعی

عمل می کند نسبت کرنش در جهت عرض به کرنش در جهت طول میله ثابت و به ضریب پواسون (ν)

موسوم می باشد (کرنش جانبی و کرنش طولی مخالف علامت یکدیگر هستند)

$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \text{کرنش طولی/کرنش جانبی}$$

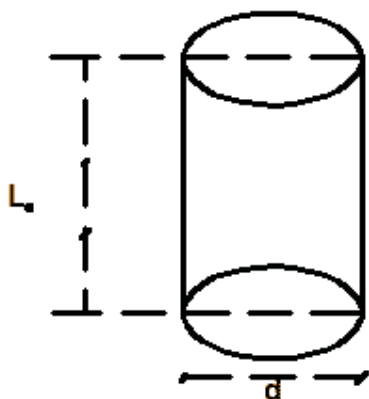
مقدار ν برای فولاد سافتمانی مدود 0.25 و برای بتن آرمه مدود 0.15 است. $\nu < 0.5$

مثال:

میله ای مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی 15ton قرار گرفته و در طول مشخص شده $L_o = 25cm$ با

مقطع دایره ای به قطر $d=5cm$ تغییر طول $\Delta L = 0.25mm$ اندازه گیری شد و مشاهده گردید که قطر

میله به اندازه 0.01mm کاهش یافته است . مطلوبست محاسبه G, ν, E



$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{0.25}{250} \Rightarrow \epsilon_x = 0.001$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0.01}{50} \Rightarrow \epsilon_y = -2 \times 10^{-4}$$

$$\nu = \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{2 \times 10^{-4}}{0.001} \Rightarrow \nu = 0.2$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{15000}{\pi \times \frac{5^2}{4}} = 763.97 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{763.97}{0.001} \Rightarrow$$

$$E = 7.64 \times 10^5 \frac{kg}{cm^2}$$

از طرفی سه ثابت ارتجاعی ν, G, E از یکدیگر مستقل نیستند و بین آنها رابطه زیر وجود دارد. لذا

فواهیم داشت:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{7.64 \times 10^5}{2(1+0.2)} \Rightarrow G = 318.33 \times 10^3$$

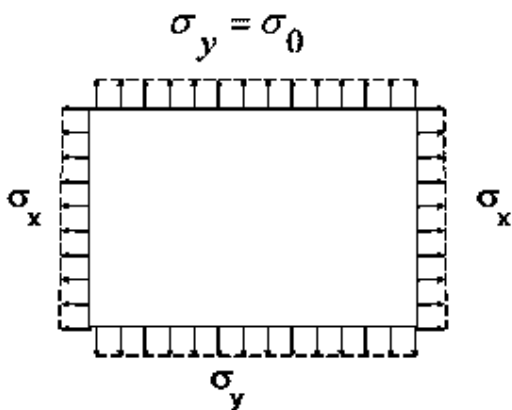
تعمیم قانون هوک برای اجسام ایزوتروپ و سه بعدی:

به اجسامی که خواص مکانیکی آن از جهت تغییر شکل پذیری در تمام جهات یکسان است ایزوتروپ گویند. قبلاً قانون هوک را برای اعضای با نیروی محوری بعنوان رابطه تنش در امتداد طول عضو و تغییر شکل نسبی در امتداد طول عضو بصورت $\sigma = E \cdot \varepsilon$ معرفی کردیم که E را مدول الاستیسیته نامیدیم. در حالت کلی برای اجسامی که تحت اثر تنش در امتداد یک، دو یا سه محور قرار گیرند به فرم کلی زیر بیان می کنیم که به قانون هوک کلی برای اجسام ایزوتروپ معروف است.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

مثال:

صفحه مستطیلی مقابل تحت اثر تنشهای یکنواخت σ_x, σ_y قرار دارد. در صورتیکه $\varepsilon_x = 0, \sigma_y = \sigma_0$



باشد نسبت $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_y}$ را تعیین کنید.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \Rightarrow 0 = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E}(\nu\sigma_0) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

تنش مرارتی:

اگر جسمی تحت اثر تغییر درجه مرارت قرار گیرد ، یعنی به اندازه ΔT درجه گرم یا ΔT درجه سرد شود از هر جهت بطور مساوی (برای اجسام ایزوتوپ مرارتی)، منبسط یا منقبض می شود بعبارت دیگر تغییر شکل نسبی در هر سه جهت کارتیزین بطور مساوی فواید داشت که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} \end{cases} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon l_0 = \alpha \Delta T \cdot l_0$$

توجه: تغییر شکل نسبی برشی در اثر تغییرات درجه مرارت بوجود نمی آید.

اگر تغییرات درجه مرارت به اندازه ΔT درجه مرارت همزمان با اعمال تنش باشد. تغییر طول نسبی مرارتی یا تغییر طول نسبی در هر جهت جمع جبری می شود یعنی:

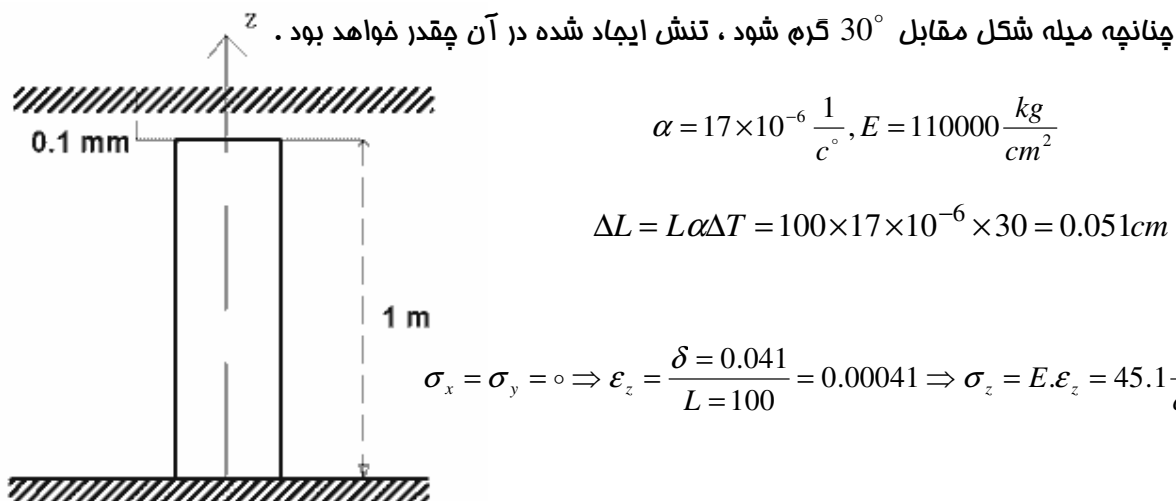
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T \end{cases}$$

$\Delta T = T_2 - T_1$ برای افزایش درجه مرارت مثبت است.

ضریب انبساط مرارتی α بستگی به جنس جسم دارد که با آزمایش بدست می آید.

$\alpha_c = 16.7 \times 10^{-6} / ^\circ C$ مس و $\alpha_a = 22 \times 10^{-6} / ^\circ C$ آلومینیوم و $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ C$ فولاد.

مثال:



سازگاری تغییر شکلهای:

جهت روشن شدن موضوع سازگاری شکل مقابل که وزنه $F = 2 ton$ دو سیم مجاور هم از سقف آویزان

است را در نظر می گیریم. سیم فولادی با قطر 1cm و ضریب الاستیسیته $E = 2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ و سیم

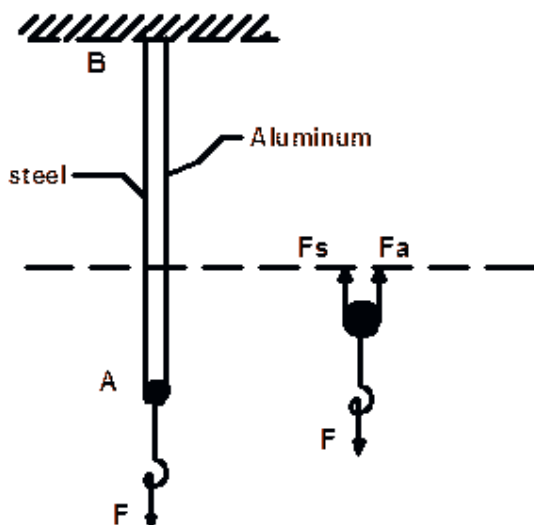
آلومینیومی با قطر 1cm و $E = 0.55 \times 10^6$ و هر دو به طول

اولیه 1m می باشند. با فرض تنش حداکثر الاستیک

فقط برای فولاد $F_y = 2400 \frac{kg}{cm^2}$ و برای آلومینیوم

$F_y = 1400 \frac{kg}{cm^2}$ باشد سهم نیروی حمل شده توسط میله های

فولادی و آلومینیومی را بدست آورید.



از تعادل استاتیکی در امتداد قائم می توانیم بنویسیم :

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow F_a + F_s = F$$

از طرف دیگر A سر قلاب همواره در هر شرایطی به سر دو سیم وصل است و نقطه B اتصال هر دو سیم به سقف ثابت می باشد، بنابراین در تمام طول بارگذاری قبل و بعد از آن طول هر دو سیم باید مساوی باشد بعبارت دیگر در اثر بارگذاری تغییر شکل طولی کل هر دو سیم یکسان است.

$$\Delta L_s = \frac{F_s \cdot L_s}{E_s \cdot A_s} \Rightarrow \Delta L_s = \Delta L_a \Rightarrow \frac{F_s \cdot L_s}{E_s \cdot A_s} = \frac{F_a \cdot L_a}{E_a \cdot A_a} \Rightarrow L_s = L_a, A_s = A_a$$

$$\Delta L_a = \frac{F_a \cdot L_a}{E_a \cdot A_a}$$

$$\frac{F_s}{E_s} = \frac{F_a}{E_a} \rightarrow F_s = \frac{E_s}{E_a} F_a \quad (1)$$

$$F_a + F_s = F \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow F_a + \frac{E_s}{E_a} F_a = F \Rightarrow F_a \left(1 + \frac{E_s}{E_a}\right) = F \rightarrow \begin{cases} F_a = \frac{E_a}{E_a + E_s} \times F \\ F_s = \frac{E_s}{E_s + E_a} \times F \end{cases}$$

پس از بارگذاری تغییر شکل در سیم و تعادل استاتیکی خواهیم داشت.

نیروی داخلی سیم فولادی:

$$F_s = \frac{E_s}{E_s + E_a} \times F = \frac{2.1 \times 10^6}{(2.1 + 0.55) \times 10^6} \times 2 \times 1000 \Rightarrow F_s = 1585 \text{ kg}$$

نیروی داخل سیم آلومینیومی:

$$F_a = \frac{E_a}{E_a + E_s} \times F = \frac{0.55 \times 10^6}{(2.1 + 0.55) \times 10^6} \times 2000 \Rightarrow F_a = 415 \text{ kg}$$

مشاهده می کنیم که دو سیم با قطر مساوی در طول مساوی و تحت شرایط بارگذاری مساوی نیروهای

متفاوتی تحمل می کنند.

$$\sigma_s = \frac{1585}{\pi \times \frac{(1)^2}{4}} = 2108 \langle \sigma_{ys} = 2400 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_a = \frac{415}{\pi \times \frac{(1)^2}{4}} = 528 \langle \sigma_{ya} = 1400 \frac{kg}{cm^2}$$

چون تنش موجود فولاد و آلومینیوم کمتر از تنش تسلیم است. پس شرایط الاستیک فطی در محاسبه تغییر شکل بکار رفته درست بود و گر نه محاسبه تغییر شکل می بایست با توجه به پلاستیک شدن مصالح صورت گیرد.

سازه های کششی – فشاری هیپراستاتیک

مسائل سازه های نا معین (هیپراستاتیک) را که فقط تحت اثر نیروهای مموری باشند با استفاده از سازگاری تغییر شکلهای و اصل جمع اثر نیروها بشرطی که رفتار مصالح الاستیک فطی باشد می توان محاسبه کرد. اصل جمع اثر نیروها بدین معنی است که اگر جسمی تحت اثر چند نیرو قرار گیرد تغییر شکل یا تنش کل ایجاد شده در یک نقطه از جسم برابر است با جمع جبری تغییر شکلهای یا تنش ها و اثرات، هر یک از نیروها که به تنهایی منظور شود.

مثال:

میله ای به طول $L=3m$ و سطح مقطع $A = 2cm^2$ به شکل مقابل تحت بار $E=2ton$ در نقطه ای به فاصله $2m$ از انتهای بالائی قرار گرفته می خواهیم عکس العمل های آنرا محاسبه کنیم.

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \rightarrow R_A + R_B = 2ton \quad (1)$$

از معادلات تعادل الاستیک نمی توان عکس العمل ها را محاسبه کرد. چون محاسبه دو مجهول

R_B, R_A فقط یک معادله تعادل (1) را می توانیم بنویسیم و یک معادله کم داریم.

برای پیدا کردن معادله ای دیگر به سراغ سازگاری تغییر

شکلها می رویم . با اندک دقتی متوجه می شویم که تغییر

مکان B نسبت به A یعنی تغییر طول کل میله باید صفر

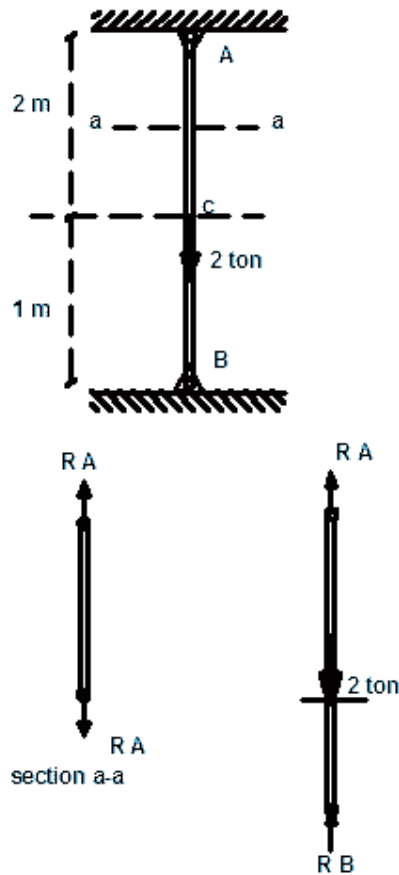
شود چون A و B تکیه گاه هستند . بنابراین بطور پارامتری

و بر حسب R_A, R_B تغییر مکان نقطه B را نسبت به A

با توجه به رفتار الاستیک خطی مناسبه می کنیم و برابر

صفر قرار می دهیم . طول AB از دو قطعه AC و BC

تشکیل شده است.



$$\Delta L_{BA_2} = \sum_1^2 \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$$

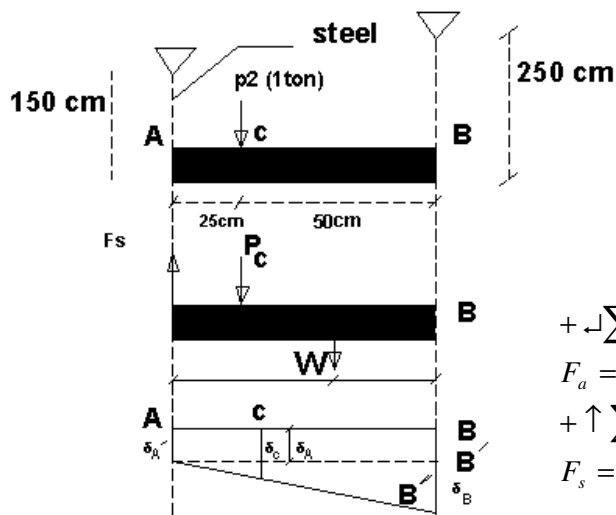
$$\Delta L_{BA} = \frac{-F_{AC} \cdot L_{AC}}{EA} + \frac{F_{CB} \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = \frac{-2 \times 1}{EA} + \frac{(RA \times 3) \times 1}{EA} = 0 \Rightarrow \frac{2 \times 1}{AE} = \frac{RA \times 3}{AE} \quad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow R_A = \frac{2}{3} \text{ ton}, R_B = \frac{4}{3} \text{ ton}$$

مثال:

دو سیم فولادی و آلومینیومی بمسامت مقطع به ترتیب $A_s = 0.785 \text{ cm}^2$, $A_a = 1.57 \text{ cm}^2$ توسط

عضو صلب و بدون تغییر شکل پذیر C به وزن 200 kg وزنه ای به وزن $p=1 \text{ ton}$ را حمل می نماید. تغییر



مکان نقطه C چقدر است؟

$$E_A = 6 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, E_s = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

از تعادل استاتیکی:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow 25P + 37.5W - 75F_a = 0$$

$$F_a = 433.3 \text{ kg}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow F_s + F_a = P + W = 1000 + 200$$

$$F_s = 766.7 \text{ kg}$$

چون جسم AB صلب است فاصله AB بعد از تغییر مکان بصورت فاصله باقی می ماند.

$$\delta_A = \delta_s = \frac{F_s \cdot L_s}{E_s \cdot A_s} = \frac{766.7 \cdot 150}{2.1 \times 10^6 \cdot 0.785} \Rightarrow \delta_A = \delta_s = 0.07 \text{ cm}$$

$$\delta_B = \delta_a = \frac{F_a \cdot L_a}{E_a \cdot A_a} = \frac{433.3 \cdot 250}{6 \times 10^5 \cdot 1.57} \Rightarrow \delta_B = \delta_a = 0.115 \text{ cm}$$

$$\delta_c = 0.07 + \frac{0.115 - 0.07}{75} \times 25 \Rightarrow \delta_c = 0.084 \text{ cm}$$

مثال:

ستونی بتن آرمه به مقطع $40 \times 40 \text{ cm}$ و طول 3 m با یک درصد فولاد طولی مفروض است می خواهیم

مقدار تنش در فولاد و بتن را به ازای نیروی فشاری 20 ton بیابیم و مقدار کاهش طولی آنرا مساب کنیم.

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, E_c = 2.1 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$A_s = 0.01 \times 40 \times 40 = 16 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت فولاد}$$

$$A_c = 40 \times 40 = 1600 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت بتن خالص}$$

فرض می شود ، فولاد و بتن تحت این بارگذاری در مد الاستیک خطی باقی می مانند و میلگردهای فولادی

کاملاً به بتن چسبیده است. پس تغییر شکل طولی هر دو باید یکسان باشد.

$$L_C = L_S = 3m$$

$$\delta = \delta_s = \delta_c \rightarrow \frac{F_S \cdot L_S}{E_S \cdot A_S} = \frac{F_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} \rightarrow F_S = \frac{E_S \cdot A_S}{E_C \cdot A_C} F_C = \frac{2.1 \times 10^6 \times 16}{2.1 \times 10^5 \times 1534} F_C$$

$$F_S = 0.101 F_C \quad (1)$$

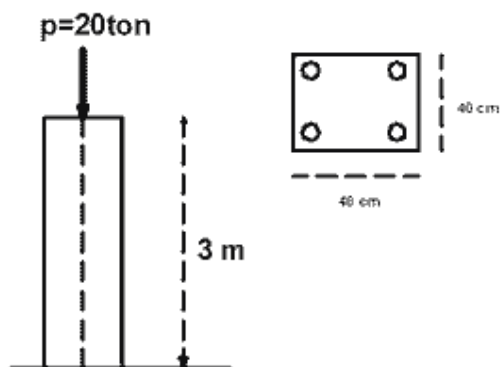
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_S + F_C = 20 \text{ ton} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} F_S = 1.84 \text{ ton} \\ F_C = 18.16 \text{ ton} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_s = 114.67 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ \sigma_c = 88.106 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \end{cases}$$

$$\delta_s = \frac{F_S \cdot L_S}{A_S \cdot E_S} = \frac{1.84 \times 1000 \times 300}{16 \times 2.1 \times 10^6} \Rightarrow \delta_s = 0.0164 \text{ cm}$$

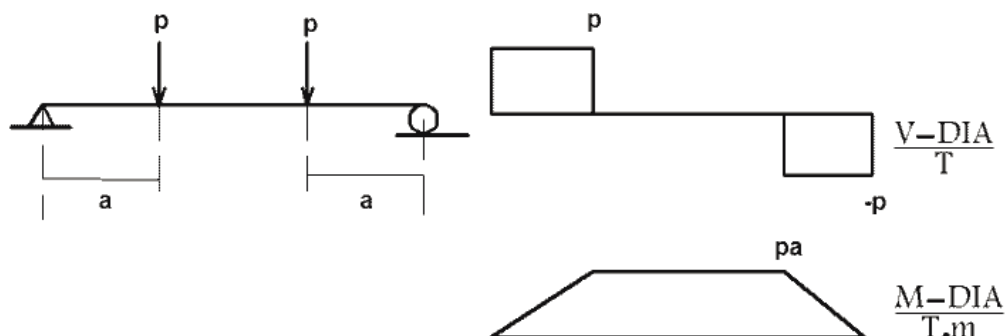
$$\delta_c = \frac{F_C \cdot L_C}{A_C \cdot E_C} = \frac{18.16 \times 1000 \times 300}{1534 \times 2.1 \times 10^5} \Rightarrow \delta_c = 0.0164 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \delta_s = \delta_c$$



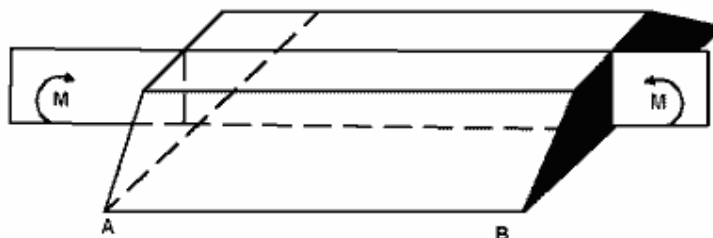
فصل ششم

خمش خالص تیرها:



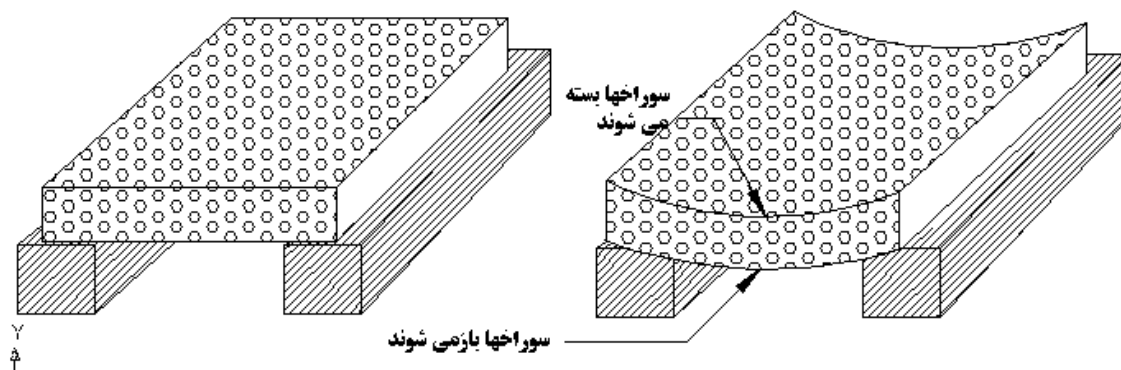
در نامیه مرکزی این تیر نیروی برشی وجود ندارد و این نامیه تنها تحت لنگر خمشی ثابتی برابر Pa قرار دارد تیری را که در دو انتهای خود تحت تأثیر و لنگر خمشی مساوی ، مختلف الجهت و هم صفحه قرار دارد، می گویند که در خمش خالص است.

توجه: پیش از ایجاد تنش برشی و خمش ایجاد تنش مموری می کند.

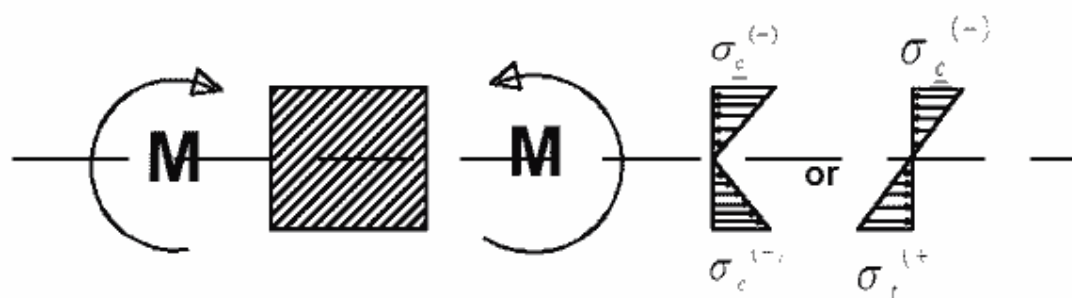


با آزمایش ساده ای می توان خمش یک تیر ساده را مشاهده نمود. برای این کار یک تکه اسفنج به ابعاد مثلاً $150mm \times 100mm \times 50mm$ را مطابق شکل بر روی دو تکیه گاه قرار دهید و با دست بر آن فشار وارد کنید مشاهده خواهید کرد که سوراخهای اسفنج در بالای آن بسته و نشان دهنده فشار در بالای اسفنج، و در پائین آن باز و نشان دهنده کشش در پایین اسفنج ، می باشند. سوراخها در مجاورت دو تکیه

گاه تقریباً بدون تغییر باقی می ماند زیرا لنگر خمشی در دو انتهای تیر در مقایسه با وسط تیر خیلی کوچک هستند.



با توجه به مثال ذکر شده می توان نیروهای وارد بر مقطع عرض یک تیر را که در خمش خالص قرار دارند به صورت زیر نشان داد.



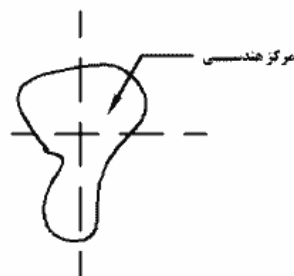
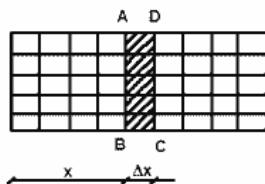
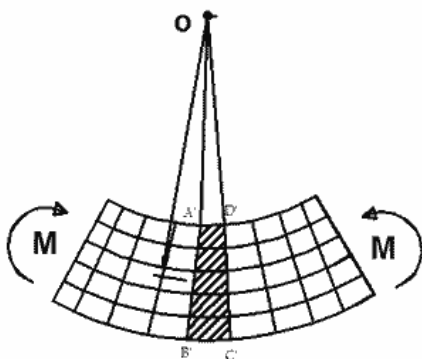
فرضیات اساسی خمشی:

1- صفحات عمود بر محور، بعد از اعمال خمش به صورت صفحه باقی می ماند و تنها حول یک

محور دوران می کنند .

2- تغییر شکلهای دارای تغییرات قطعی نسبت به محور دوران هستند.

رفتار مصالح در کشش و فشار یکسان است.



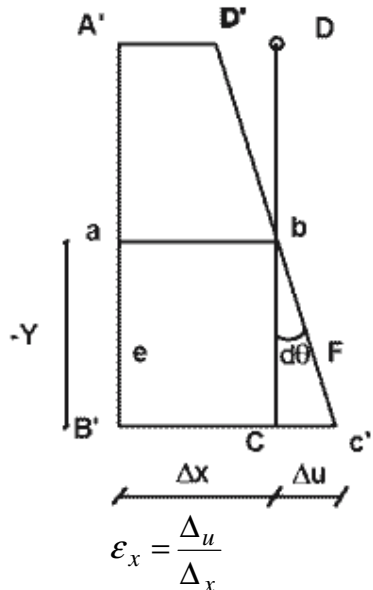
$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d_{\theta}}{d_x} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{y}{\rho} = ky$$

در یک تیر تحت خمش، تغییرات کرنش موجود در تارهای

طولی موازی صفحه فنتی به صورت خطی می باشد و یا

به عبارت دیگر، مقدار کرنش تارهای فوق متناسب با

فاصله آنها از محور فنتی می باشد.



در تصویر بزرگ شده این جزء کوچک دیده می شود که طول تارهایی از تیر که در روی سطحی نظیر ab

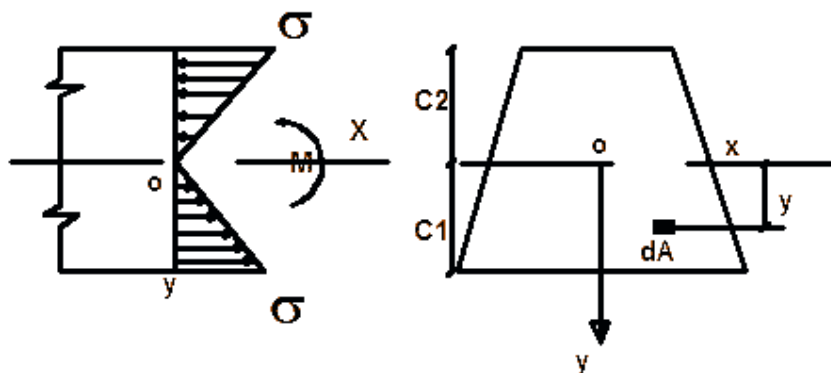
قرار دارند، تغییری نمی کند، چون جزء مزبور به صورت دلفواه انتصاب شده است. تارهای عاری از

تنش و کرنش به طور پیوسته در تمام طول و پهنای تیر وجود دارند. این تارها در روی صفحه ای قرار

دارند که سطح فنتی تیر نامیده می شود. فصل مشترک این صفحه با یک مقطع عرض قائم بر تیر

محور فنتی نامیده می شود از هر دو اصطلاح برای نشان دادن محل تنش یا کرنش صفر در یک عضو

تحت خمش استفاده می شود.



اثبات اینکه محور اصلی فنتی باید از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور کند:

$$F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{+} \sum \sigma_x = E \cdot \epsilon \quad (2) \quad \epsilon_x = \frac{y}{\rho} = ky \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \sigma_x = E \cdot ky \quad (4) \quad K = \frac{1}{\rho}$$

$$(4) \text{ و } (1) \Rightarrow \int \sigma_x dA = \int \frac{E y}{\rho} dA = 0$$

چون شعاع انحناء ρ و ضریب ارتجاعی E مقادیر ثابتی هستند از این معادله نتیجه می شود که برای

تیری در فمش خالص رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \Rightarrow \int y dA = \bar{y} A \Rightarrow$$

که در آن \bar{y} فاصله مرکز هندسی سطح A از محور مبناء می باشد. بنابراین $\bar{y} A = 0$ از آنجایی که A صفر

نیست، \bar{y} باید مساوی صفر شود. بنابراین فاصله مرکز هندسی سطح مقطع محور فنتی باید صفر باشد.

دومین شرط تعادل، تعادل لنگرهای فنتی حول محور Z می باشد لذا داریم:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M - \int_A (b x dA) y = 0 \Rightarrow M = \frac{E}{\rho} \int \underbrace{y^2 dA}_I = \frac{EI}{\rho}$$

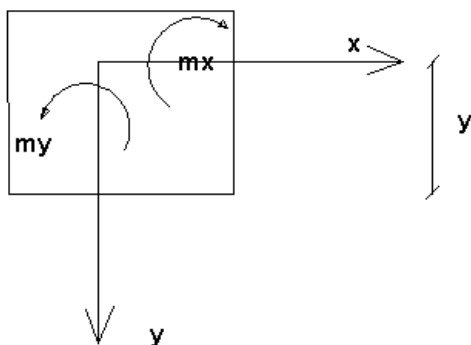
انحناء محور طولی تیر مستقیماً با لنگر خمشی M و معکوساً با کمیت EI موسوم به صلبیت فنی تیر

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow (1)$$

مناسب می باشد.

$$\sigma_x = K.Ey = \frac{Ey}{\rho} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{Ey}{EI} \Rightarrow \sigma_x = \frac{M.y}{I} \quad (1) \text{ و } (2) \text{ از}$$



M = لنگر خمشی

C = دورترین فاصله تا تار فنی

I = مان اینرسی حول محور فنی

$$\sigma_y = \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad \text{خمشی حول محور } y$$

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad \text{خمشی حول محور } z$$

روابط فوق در صورتی صادق هستند که محورها x و y محورها اصلی مقطع باشند.

$$S = \frac{I}{Y} \quad \text{مدول مقطع}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M}{S}$$

مثال:

ممان خمشی مجاز تیر با مقطع مربع چند برابر ممان مجاز مقطع دایره ای از جنبش مشابه و سطح

مقطع یکسان است؟

$$A_1 = A_2 \Rightarrow a^2 = \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\pi}{4} D^2}, S_1 = \frac{I_1}{C_1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{48} D^3$$

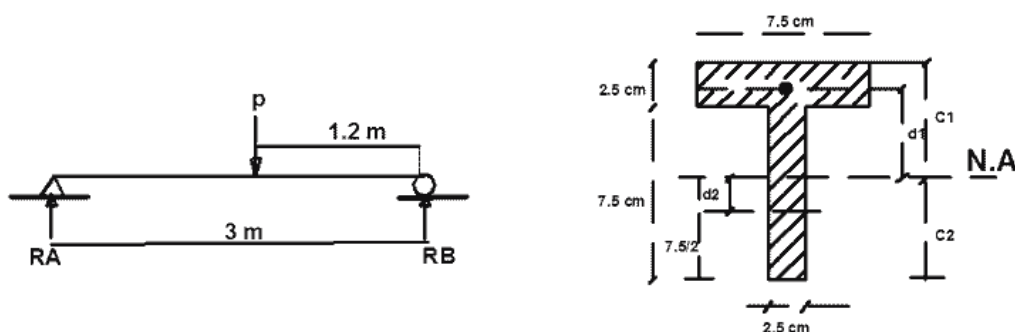
$$S_2 = \frac{I_2}{C_2} = \frac{\pi \frac{D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} = 1.18 \Rightarrow$$

$$\frac{M_{1all}}{M_{2all}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} = 1.18$$

مثال:

تعیین کنید حداکثر تنش عمودی ناشی از خمش را در تیر ساده زیر وقتی که $P=600\text{kg}$ و سطح مقطع

عرض آن مطابق شکل زیر باشد.



$$+\circlearrowleft \sum m_A = 0 \Rightarrow -R_B \times 3 + 600 \times 1.8 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{600 \times 1.8}{3} = 360\text{kg} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + 360 - 600 = 0 \Rightarrow R_A = 240\text{kg} \uparrow$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} = \frac{7.5 \times 2.5 \times \frac{2.5}{2} + 7.5 \times 2.5 \times (\frac{7.5}{2} + 2.5)}{7.5 \times 2.5 \times 2} \Rightarrow \bar{y} = 3.75\text{cm}$$

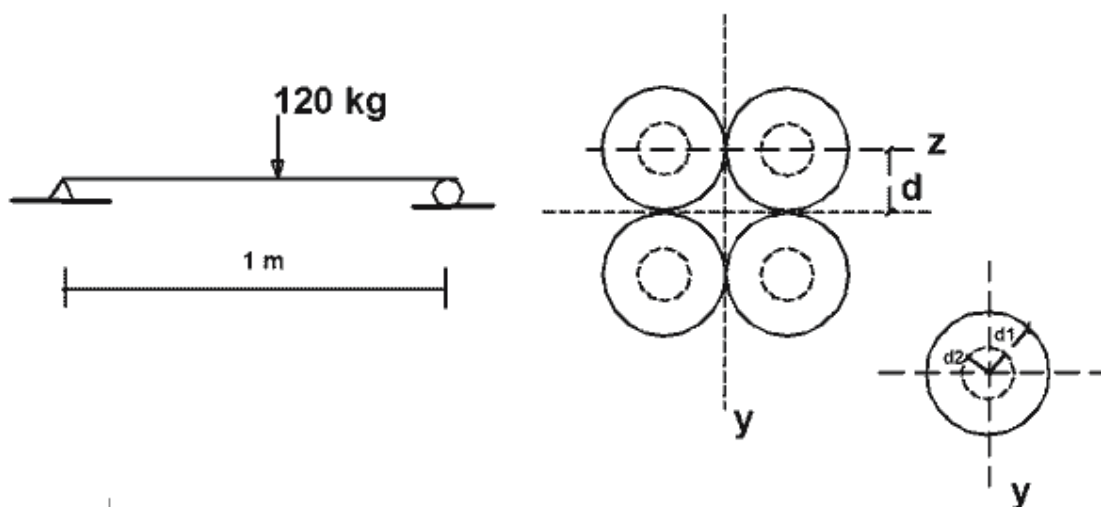
$$C_1 = 3.75 \text{ cm}, C_2 = 10 - 3.75 = 6.25 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 2.5^3 + 7.5 \times 2.5 \times \left(3.75 - \frac{2.5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 2.5 \times 7.5^3 + 2.5 \times 7.5 \times \left(6.25 - \frac{7.5}{2}\right)^2 = 322.03 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot C_2}{I} = \frac{43200 \times 6.25}{322.03} = 813.2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

مثال:

یک لوله فولادی به قطر خارجی $d_1 = 4 \text{ cm}$ و قطر داخلی $d_2 = 3 \text{ cm}$ به صورت تیر ساده برای پوشاندن دهانه یک متری بکار رفته است. حداکثر بار مجازی که این لوله در وسط دهانه اش می تواند تحمل 120 kg می باشد. اگرچه چهار عدد از این لوله ها به صورت موازی به یکدیگر کاملاً متصل گردند و برای پوشش همان دهانه بکار روند حداکثر باری که چهار لوله می توانند در وسط دهانه شان تحمل کنند چقدر است؟



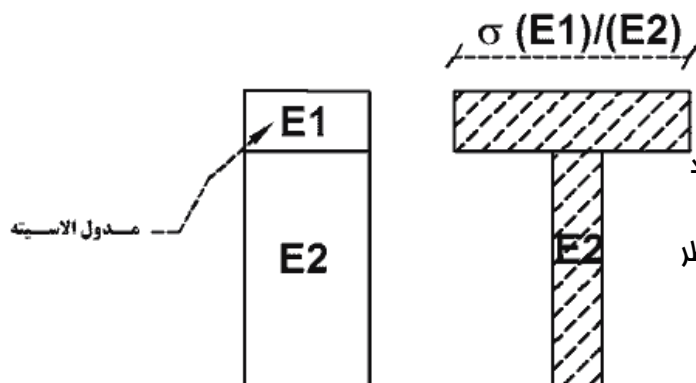
$$I_{z1} = \frac{\pi}{64} (d_1^4 - d_2^4) = \frac{\pi}{64} (4^4 - 3^4) = 8.59 \text{ cm}^4$$

$$S_1 = \frac{I_{z1}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{8.59}{2} = 4.295 \text{ cm}^3$$

برای چهار لوله مزبور می توانیم بنویسیم

$$I_{z2} = 4 \left[8.59 + \frac{\pi}{4} (4^2 - 3^2) 2^2 \right] = 122.32 \text{ cm}^4$$

$$S_2 = 122.32/4 = 30.58 \text{ cm}^3 \Rightarrow \frac{30.58}{4.295} \times 120 = 206.7 \text{ kg}$$



فروش مقطع دو جنسی:

مقاطع را که از دو جنس متفاوت تشکیل شده اند

می توان بصورت یک شکل معادل یک جنسی در نظر

گرفت. بدین صورت که عرض یکی از دو قسمت را

به نسبت مدولهای الاستیسیته افزایش می دهیم .

در این حالت تنش بدست آمده قسمت قبل تبدیل یافته را باید به نسبت مدولهای الاستیته افزایش

دهیم.

مثال:

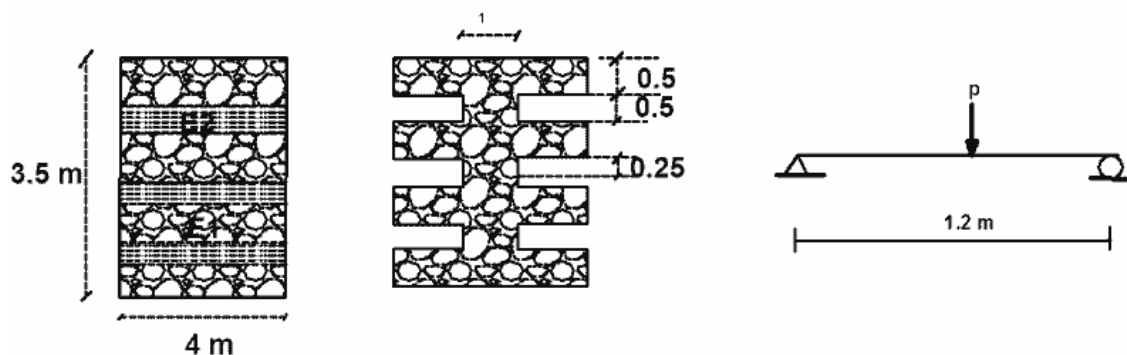
مقطع عرضی تیر کوچکی که از هفت لایه پند لایه ساخته شده در شکل زیر نشان داده شده است. رگه

هایی لایه ها یک در میان موازی طول تیر است. تیر مزبور به طول 1.2m و دارای دو تکیه گاه ساده می

باشد و بار متمرکز p در وسط دهانه آن وارد می شود. ضریب ارتجاعی در جهت موازی رگه ها برابر

$E_1 = 10^6 \text{ kg/cm}^2$ و جهت عمود بر رگه ها برابر $E_2 = 2.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ است. تنش های مجاز

مربوطه $\sigma_1 = 84 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = 21 \text{ kg/cm}^2$ است . مقدار مجاز بار p را تعیین کنید.



Y
↑

$$n = \frac{E_2}{E_1} = 0.25$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3 + Adt^2 - 3\left[\frac{1}{12}bh^3\right] + 2Ad$$

$$I = 4 \times \frac{3.5^3}{12} - 3\left[3 \times \frac{0.5^3}{12}\right] - 2[(3 \times 0.5)(0.5 \times 2)^2] = 11.2 \text{ cm}^4$$

تنش σ_1 در این مسئله تنش تعیین کننده است و لنگر خمشی مراکزتری که مقطع مزبور می تواند

$$M_{\max} = \frac{I}{C} \sigma_1 = \frac{11.2}{1.75} \times 84 = 537 \text{ kg.cm}$$

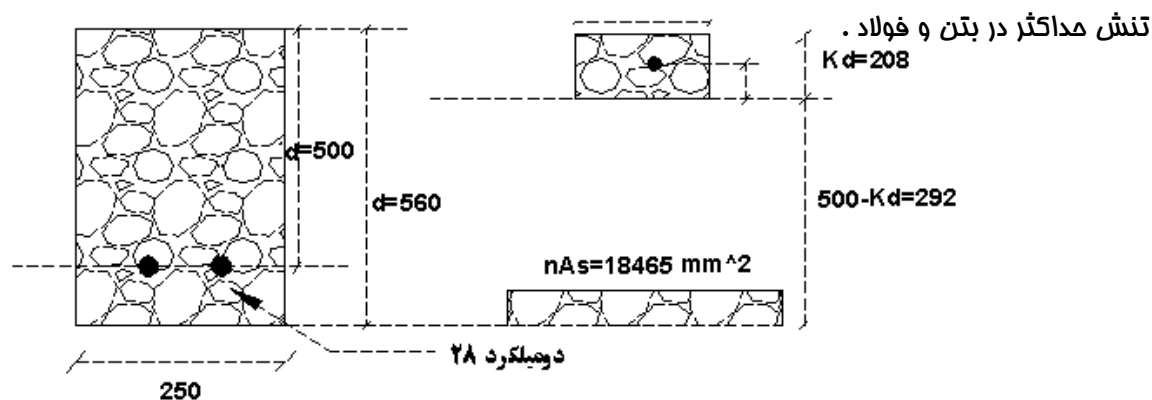
تحمل کند مساویست با:

$$p = \frac{4M_{\max}}{L} = \frac{4 \times 537}{120} = 18 \text{ kg}$$

مثال:

مقطع تیر بتن شکل زیر تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت 69.2 کیلو نیوتن قرار دارد. اگر فولاد مقطع

دو میلگرد به قطر 28 میلی متر و نسبت ضریب ارتجاعی فولاد و به بتن 15 باشد و $n=15$ مطلوبست



$$As = 2\pi \times \frac{28^2}{4} = 1231 \text{ mm}^2 = \text{سطح مقطع فولاد}$$

$$nAS = 15 \times 1231 = 18465 \text{ mm}^2 = \text{سطح مقطع تبدیل یافته فولاد}$$

$$250(kd) \times (k \frac{d}{2}) = 18465 \times (500 - kd) \Rightarrow 125(kd)^2 = 0232500 - 18465kd$$

$$(kd)^2 + 147.72kd - 73860 = 0 \Rightarrow kd = 208 \text{ mm}, 500 - kd = 292 \text{ mm}$$

توجه: اگر در جواب بدست بیاید عدد مثبت قابل قبول می باشد و اگر بیشتر از d باشد عدد بدست آمده

تا قابل قبول نیست.

$$I = 250 \times 208^3 + 250 \times 208 \times (\frac{208}{2})^2 + 0 + 18465(292)^2 = 2.32 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{69.2 \times 10^6 \times 208}{2.32 \times 10^9} = 6.2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t = n \frac{Mc}{I} = \frac{15 \times 69.2 \times 10^6 \times 292}{2.32 \times 10^9} = 131 \text{ N/mm}^2$$

فصل هفتم:

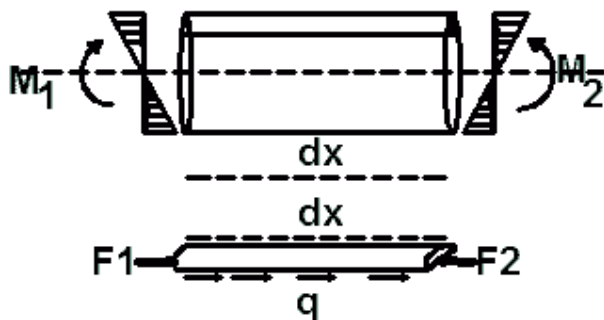
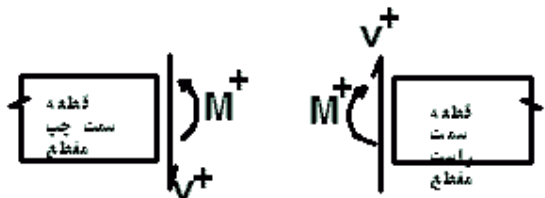
تنشهای برشی در تیرها:

علت اینکه نمی توانیم از روشهای قبلی استفاده کنیم این است که نمی توانیم هیچ فرض ساده ای

برای توزیع کرنش ناشی از نیروی برشی، برقرار کنیم.

$$d_m = v dx \quad \text{or} \quad \frac{d_m}{dx} = v$$

جریان برش:



$$d_F = F_2 - F_1 = \frac{M_2 Q}{I} - \frac{M_1 Q}{I} = \frac{(M_2 - M_1) Q}{I}$$

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} \Rightarrow q = \frac{VQ}{I}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$

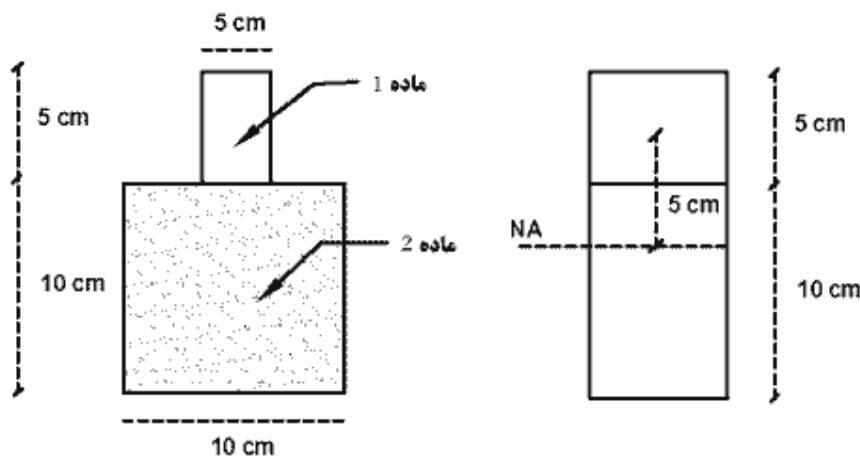
و تنش برشی در عرض مقطع ، یکسان فرض می شود

q شدت نیروی برشی در طول می باشد که به آن جریان برش گویند.

مثال:

مقطع تیری مطابق شکل از دو ماده تشکیل شده است. چنانچه نیروی برشی 6ton به این مقطع اعمال

شود تنش برشی در محل اتصال دو ماده برابر با چه مقدار است؟ $\frac{E_1}{E_2} = 2$



نکته: مرکز سطح و ممان اینرسی را از مقطع تبدیل نشده انتخاب میکنیم ولی برای محاسبه تنش برشی

در هر هرمقطع باید این جریان برشی در عرض واقعی همان ماده تقسیم شود.

$$\bar{y} = \frac{10 \times 5 \times 2.5 + 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 + 2.5 \times 10} = 7.5$$

$$I = \frac{1}{12} \times 5^3 \times 10 + 5 \times 10 \times 5^2 + \frac{1}{12} \times 10^3 \times 10 + 10 \times 10 \times 2.5$$

$$= 2812.5 = \frac{1}{12} \times 15^3 \times 10$$

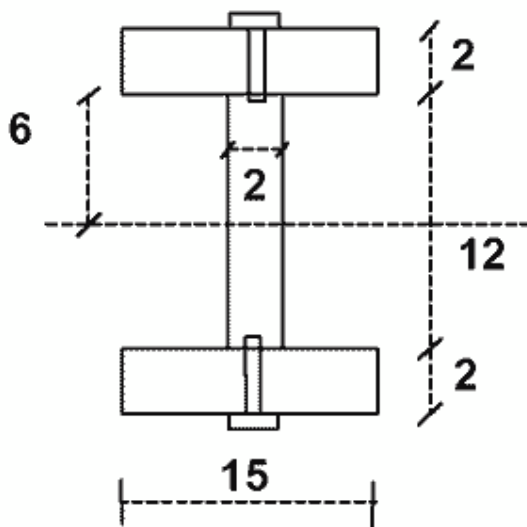
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{6 \times 10^3 \times 5 \times 10 \times 5}{\frac{10 \times 15^3}{12}} = 533.3 \quad \frac{kg}{cm}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{533.3}{5} = 106.66 \text{ kg/cm}^2$$

مثال:

مقطع زیر که از اتصال سه قطعه تشکیل شده است تحت اثر نیروی برشی 250kg قرار دارد. در صورتیکه

نیروی برشی مجاز هر یک از پیچهای اتصال 150kg باشد فاصله لازم برای پیچها را تعیین کنید.



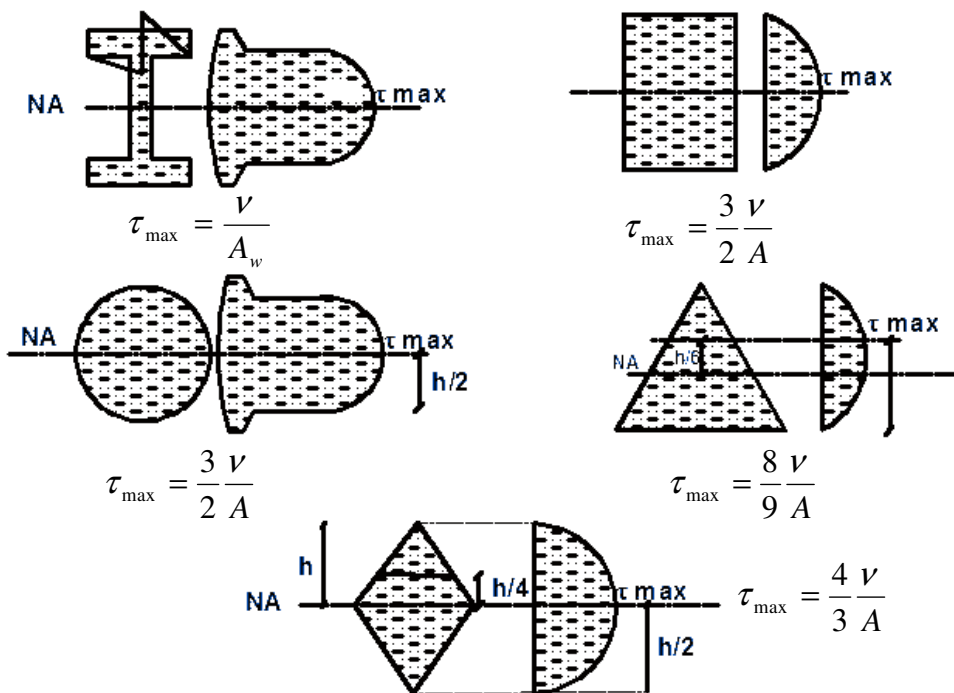
$$I = 2 \times \left(\frac{15 \times 2^3}{12} + 15 \times 2 \times 7^2 \right) + 2 \times \frac{12^3}{12} = 3248 \text{ cm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{250 \times 2 \times 15 \times 7}{3248} = 16.16 \text{ kg/cm}, \Rightarrow q \cdot s = F_{all} \Rightarrow 16.16 \times s = 150 \Rightarrow s = 9.28 \text{ cm}$$

توزیع تنش برشی:

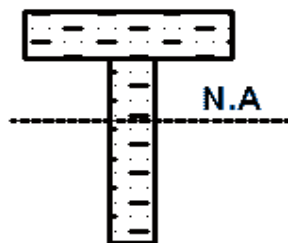
توزیع تنش برشی در عرض مقطع ، یکنواخت فرض می شود. توزیع تنش برشی در ارتفاع تابعی از $\frac{Q}{t}$ می

باشد و ماکزیمم آن در جایی است که بیشترین $\frac{Q}{t}$ را داشته باشد.

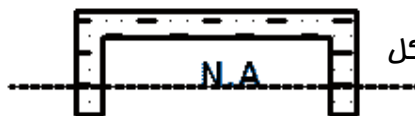


مثال:

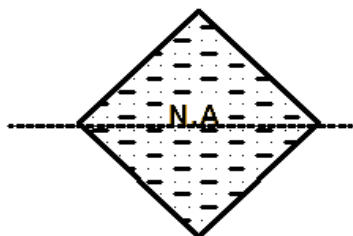
در کدام یک از مقاطع زیر حداکثر تنش برشی در (روی محور فنتی ظاهر نمی شود.



ب) شکل T



الف) ناودانی شکل



د) لوزی شکل



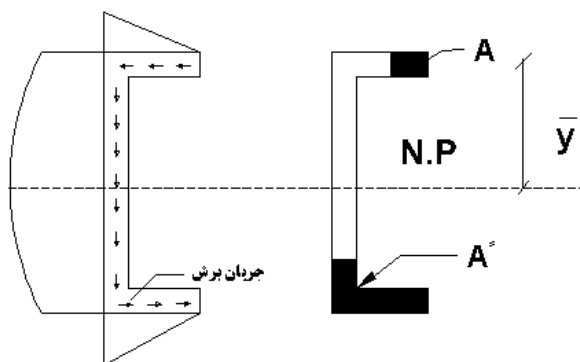
ج) لوله ای شکل

در شکلهای الف و ب و ج چون در محل تار فنتی که بیشترین مقدار Q وجود دارد. کمترین ضخامت را

داریم، بنابراین تنش برشی ماکزیمم در تار فنتی خواهد بود. ولی در لوزی به علت متغیر بودن $\frac{Q}{t}$ در

ارتفاع همانگونه که در اشکال توزیع تنش برشی دیده می شود. ماکزیمم تنش برشی در تار فنتی

نیست.



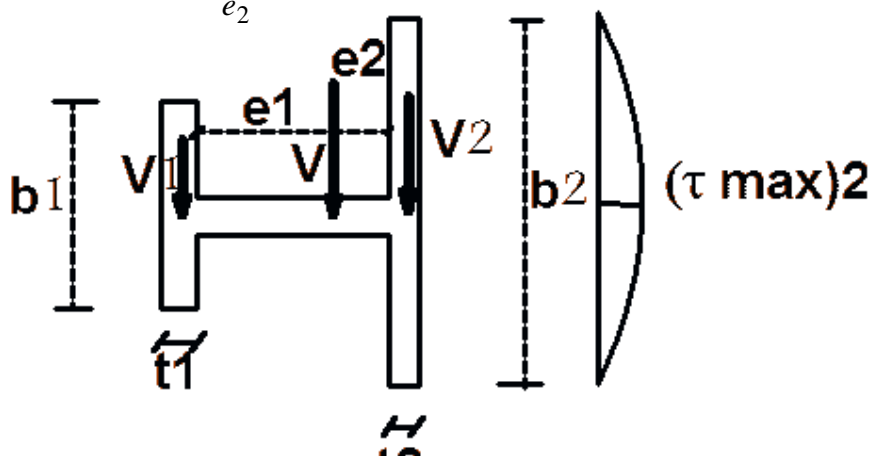
مرکز برش:

به نقطه ای گفته می شود که اگر نیروی برشی از آن نقطه عبور کند، پیمایش در مقطع بوجود نمی آید . در

شکلهایی که محور تقارن دارند مرکز برش بر روی این محور قرار دارد.

مثال:

در شکل زیر در صورتیکه نقطه A محل مرکز برش باشد مطلوبست نسبت $\frac{e_1}{e_2}$



$$V_1 = \frac{2}{3}(\tau_{\max})_1 \times A_1 = \frac{2}{3} \times \frac{V \times (\frac{b_1 t_1}{2} \times \frac{b_1}{4})}{I t_2} \times b_1 t_1$$

$$= \frac{t_1 b_1^3}{12} \times \frac{V}{I} = I_1 \frac{V}{I}$$

$$V_2 = \frac{2}{3}(\tau_{\max})_2 \times A_2 = \frac{2}{3} \times \frac{V \times (\frac{b_2 t_2}{2} \times \frac{b_2}{4})}{I t_2} \times b_2 t_2$$

$$= \frac{t_2 b_2^3}{12} \times \frac{V}{I} = I_2 \frac{V}{I}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{I} V, \quad V_2 = \frac{I_2}{I} V, \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow V_1 e_1 = V_2 e_2 \Rightarrow$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{t_2 b_2^3}{t_1 b_1^3}$$

مرکز برش اجسام مختلف:

